



Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung vorbehalten.

Herausgeber: Forstliche Forschungsanstalt München  
Amalienstrasse 52, D-8000 München 40  
verantwortlich: Der Obmann  
der Forstlichen Forschungsanstalt  
München

Anschrift des  
Verfassers: Prof. Dr. Anthonie van Laar  
Faculty of Forestry  
University of Stellenbosch  
Stellenbosch, South Africa

Dokumentation: Forschungsber. FFA München Nr. 44, 1979, 701 S.

Zu beziehen über die Universitätsbuchhandlung Heinrich Frank, Schellingstrasse 3,  
D-8000 München 40

# INHALTSVERZEICHNIS

## Teil I: Verfahrensgrundlagen

### EINLEITUNG

1. GRUNDGEBRIFFE AUS DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE	
1.1 Mengen .....	4
1.2 Der Begriff Wahrscheinlichkeit .....	5
1.3 Permutationen und Kombinationen .....	6
1.4 Der Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten .....	9
1.5 Der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten .....	10
1.6 Die bedingte Wahrscheinlichkeit .....	12
1.7 Abhängigkeit und Unabhängigkeit .....	13
1.8 Bayes'sche Wahrscheinlichkeit .....	14
2. DIE CHARAKTERISIERUNG VON HÄUFIGKEITSVERTEILUNGEN	
2.1 Diskrete und stetige Zufallsvariablen .....	18
2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	19
2.3 Erwartungswert .....	21
2.4 Die Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	22
2.5 Die graphische Darstellung .....	22
2.6 Die Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	24
2.7 Mittelwerte .....	24
2.8 Streuungsmasszahlen .....	30
2.8.1 Die Varianz .....	30
2.8.2 Der Variationskoeffizient .....	33
2.8.3 Die Variationsbreite .....	34
3. DIE WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG VON STETIGEN UND DISKRETEN VARIABLEN	
3.1 Die Normalverteilung .....	35
3.2 Masszahlen für Schiefe und Kurtosis .....	42
3.3 Die Binomialverteilung .....	46
3.4 Die Poisson-Verteilung .....	52
3.5 Die hypergeometrische Verteilung .....	55
3.6 Die negative Binomialverteilung .....	58
3.7 Die multinomiale Verteilung .....	61
3.8 Die Neyman-Verteilung .....	62
3.9 Die Beta-Verteilung .....	64
3.10 Die lognormale Verteilung .....	68
3.11 Die Weibull-Verteilung .....	72
4. PRÜFVERTEILUNGEN	
4.1 Die t-Verteilung .....	76
4.2 Die F-Verteilung .....	79
4.3 Die Chi-Quadrat Verteilung .....	82
5. DIE STREUUNG DER STICHPROBENMITTEL	
5.1 Die Berechnung von $\sigma_{\bar{X}}^2$ aus $\sigma^2$ .....	85
5.2 Die Streuung der Stichprobenvarianz .....	88
5.3 Die Varianz der Standardabweichung .....	89
5.4 Die Prüfung der Normalität einer Verteilung .....	90
5.5 Ausreisser .....	97
5.6 Unvollständige Stichproben aus einer Normalverteilung .....	100

6.	DIE PRÜFUNG VON STATISTISCHEN HYPOTHESEN	
6.1	Grundbegriffe .....	103
6.2	Fehler der 1. und der 2. Art .....	109
6.3	Der Einfluss von Irrtumswahrscheinlichkeit und Stichprobenumfang auf $\beta$ .....	112
6.4	Die Trennschärfe .....	113
7.	DIE SCHÄTZUNG VON PARAMETERN	
7.1	Punktschätzungen .....	115
7.2	Intervallschätzungen .....	118
7.2.1	Mittelwert einer Normalverteilung .....	118
7.2.2	Mittelwert einer Binomialverteilung .....	121
7.2.3	Mittelwert einer Poisson-Verteilung .....	126
7.2.4	Vertrauensintervall des Medians .....	126
7.2.5	Vertrauensbereich der Varianz $\sigma^2$ .....	126
7.2.6	Vertrauensbereich der Variationskoeffizienten .....	127
7.2.7	Der Vertrauensbereich des Verhältnisses zweier Varianzen .....	128
8.	DER STICHPROBENUMFANG IM KLASSISCHEN UND IM SEQUENTIELLEN PRÜFVERFAHREN	
8.1	Das klassische Prüfverfahren .....	129
8.2	Die sequentielle Stichprobenerhebung .....	132
8.2.1	Das Verfahren .....	132
8.2.2	Der Mittelwert einer Normalverteilung .....	134
8.2.3	Der Mittelwert einer Binomialverteilung .....	140
8.3	Der einseitige sequentielle Test, wenn $\sigma^2$ unbekannt ist .....	141
9.	DIE VARIANZANALYSE MIT EINFACHER KLASSIFIKATION	
9.1	Einleitung .....	143
9.2	Ein Versuch mit k Behandlungen .....	147
9.3	Das lineare additive Modell .....	148
9.4	Die Varianzanalyse mit ungleicher Besetzung der Stichproben .....	152
9.5	Die Varianzanalyse eines zufälligen Modells .....	154
9.6	Die hierarchische Klassifikation .....	157
9.7	Die Homogenität der Varianzen .....	163
9.7.1	Der Bartlett-Test .....	163
9.7.2	Das Prüfverfahren nach Hartley .....	165
9.7.3	Das Prüfverfahren nach Cochran .....	165
9.8	Transformationen .....	165
9.9	Der F-Test nach Welch, wenn $\sigma_1^2 \neq \dots \sigma_j^2 \neq \dots \sigma_k^2$ .....	169
9.10	Die Rangvarianzanalyse nach Kruskal und Wallis .....	170
9.11	Der Schnelltest nach Link und Wallace .....	171
10.	ELEMENTE DER LINEAREN ALGEBRA	
10.1	Vektoren .....	173
10.2	Matrizen .....	179
10.3	Matrixoperationen .....	181
10.3.1	Addition und Subtraktion .....	181
10.3.2	Multiplikation von Matrizen .....	182
10.3.3	Die Transponierung einer Matrix .....	184
10.4	Orthogonale Vektoren und -Matrizen .....	185
10.5	Determinanten .....	188
10.6	Lineare Gleichungssysteme .....	192
10.7	Die Lösung von Gleichungssystemen .....	194
10.8	Lineare Transformationen, Eigenwerte und Eigenvektoren .....	201

## 11. DIE EINFACHE REGRESSIONS- UND KORRELATIONSANALYSE

11.1 Die einfache Regressionsanalyse .....	208
11.1.1 Einleitung .....	208
11.1.2 Das Regressionsmodell .....	209
11.1.3 Die Schätzung der Parameter $\beta_0$ und $\beta_1$ .....	210
11.1.4 Die Standardabweichung der Regression .....	215
11.1.5 Die Prüfung der Nullhypothese $H_0: \beta_1 = 0$ .....	216
11.1.6 Konfidenzintervalle für die Parameter $\beta_0$ und $\beta_1$ .....	220
11.1.7 Der Standardfehler des Schätzwertes $\hat{Y}_1$ .....	222
11.1.8 Toleranzgrenzen .....	225
11.1.9 Die Ausschaltung von extremen Y-Werten .....	226
11.1.10 Die Schätzung von $\beta_1$ wenn X nicht fehlerfrei gemessen wird .....	227
11.1.11 Prüfung der Linearität .....	228
11.1.12 Gewichtete Regressionsanalyse .....	231
11.1.13 Die bedingte lineare Regression .....	233
11.1.14 Die "Beste" von zwei erklärenden Variablen .....	241
11.1.15 Zur rechnerischen Kalibrierung von Instrumenten und Messverfahren .....	243
11.1.16 Die Prüfung der Differenz zwischen zwei Regressionskoeffizienten .....	245
11.1.17 Regressionsanalyse bei der Zwei-Phasen Stichprobenerhebung .....	247
11.1.18 Modell II Regressionsanalyse: das Bartlett'sche Verfahren .....	250
11.1.19 Modell II Regressionsanalyse: Verfahren nach Mood .....	252
11.2 Die nichtlineare Regression .....	255
11.2.1 Die exponentielle Regression .....	256
11.2.2 Hyperbolische Regression .....	262
11.2.3 Die Funktionsgleichung $Y = \alpha + \beta Y^X$ .....	269
11.3 Die Korrelationsanalyse .....	277
11.3.1 Der Korrelationskoeffizient .....	277
11.3.2 Die Prüfung von Nullhypothesen .....	283
11.3.3 Der Intraklassen-Korrelationskoeffizient .....	287
11.3.4 Der Biserialkoeffizient .....	290
11.3.5 Der Pearson'sche Korrelationskoeffizient .....	292
11.3.6 Die Variablen $X_1$ und $X_2$ sind diskrete Variablen: der Phi-Koeffizient .....	293
11.3.7 Der Abhängigkeitskoeffizient C .....	294
11.3.8 Künstliche Korrelationen .....	295
11.3.9 Der Eckentest nach Olmstead und Tukey .....	297
11.3.10 Der Spearman'sche Rangkorrelationskoeffizient .....	298
11.3.11 Der Kendall'sche Rangkorrelationskoeffizient .....	299

## 12. DIE MEHRFACHE REGRESSIONSANALYSE

12.1 Einleitung .....	301
12.2 Das Regressionmodell mit zwei unabhängigen Variablen .....	302
12.3 Die Standardabweichung der Regression .....	310
12.4 Die Prüfung der Nullhypothesen $H_0: \beta_1 = 0$ und $H_0: \beta_2 = 0$ .....	311
12.5 Der Standardfehler eines Schätzwertes $\hat{Y}_1$ .....	316
12.6 Die mehrfache Regression in Matrixform .....	318
12.7 Die Auswahl der "besten" Regressionsgleichung .....	320
12.8 Neuberechnung der Regressionskoeffizienten, im Falle einer Streichung von unabhängigen Variablen .....	327
12.9 Polynome des k-ten Grades als Sonderfall der mehrfachen Regressionsanalyse .....	329
12.9.1 Die parabolische Regression .....	329
12.9.2 Polynome höheren Grades und orthogonale Polynome .....	331
12.10 Scheinvariablen .....	337
12.11 Die Residualabweichung .....	338
12.12 Partielle und mehrfache Korrelation .....	340

### 13. A POSTERIORI UND A PRIORI PRÜFUNGEN IN DER VARIANZANALYSE

13.1	A posteriori Prüfungen .....	342
13.1.1	Der Grenzdifferenztest .....	342
13.1.2	Der neue multiple Spannweitatest nach Duncan .....	344
13.1.3	Der Newman-Keuls Test .....	346
13.1.4	Der Tukey-Test .....	347
13.1.5	Der Scheffé-Test .....	347
13.2	A priori Prüfungen: orthogonale Kontraste .....	352
13.2.1	Grundbegriffe .....	352
13.2.2	Der individuelle Freiheitsgrad .....	354
13.2.3	Wirkungsgleichungen .....	359

### 14. DIE STATISTISCHE AUSWERTUNG VON VERSUCHEN, BEI DENEN HÄUFIGKEITEN DIE BEOBACHTETE VARIABLE DARSTELLEN

14.1	Ein-Stichprobenverfahren .....	363
14.1.1	Der Binomialtest .....	363
14.1.2	Der Chi-Quadrat Anpassungstest .....	366
14.2	Die Auswertung von Vierfeldertafeln .....	370
14.3	Die Zusammenfassung der Ergebnisse von zwei oder mehr als zwei Vierfeldertafeln ...	373
14.4	Der Fisher'sche exakte Wahrscheinlichkeitstest .....	375
14.5	Unabhängigkeitstest bei dichotomisierten Grundgesamtheiten .....	377
14.6	Der McNemar Test zur Prüfung der Signifikanz einer zeitbedingten Änderung des Mittelwertes einer binomialverteilten Grundgesamtheit .....	378
14.7	Der Unabhängigkeitstest bei der $r \times c$ Tafel ( $r > 2, c > 2$ ) .....	380
14.8	Der $2\bar{I}$ - oder G-Test .....	381

## Teil II: Auswertung forstlicher Versuche

### 15. GRUNDLAGEN DER VERSUCHSPLANUNG

15.1	Die Formulierung der Versuchsfrage .....	386
15.2	Fehlerstreuung .....	388
15.3	Genauigkeit .....	389
15.4	Wiederholungen .....	392
15.5	Randomisation .....	396
15.6	Versuchseinheit und Stichprobeneinheit .....	397

### 16. DER VERSUCH MIT ZWEI BEHANDLUNGEN

16.1	Paarweise Beobachtungen .....	400
16.1.1	Parametrische Prüfungen .....	400
16.1.2	Nicht-parametrische Prüfungen .....	401
16.2	Der Versuch mit zwei unabhängigen Stichproben .....	405
16.2.1	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Differenzen zwischen den Mittelwerten zweier Stichproben .....	405
16.2.2	Parametrische Prüfungen .....	408
16.2.3	Paarweise Beobachtungen oder unabhängige Stichproben? .....	413
16.3	Nicht-parametrische Prüfverfahren und Schnellverfahren .....	414

### 17. RANDOMISIERTE BLOCKANLAGEN UND LATEINISCHE QUADRATE

17.1	Randomisierte Blockanlagen .....	421
17.1.1	Die Blockanlage mit 1 Messwert je Versuchseinheit .....	421
17.1.2	Die Schätzung von fehlenden Messwerten .....	424
17.1.3	Die Varianzanalyse einer Blockanlage mit $n$ Beobachtungen je Versuchseinheit .....	426
17.1.4	Die relative Wirksamkeit der Blockanlage .....	430
17.1.5	Additivität .....	432
17.1.6	Die zweifache Rangvarianzanalyse nach Friedman .....	434
17.1.7	Die balancierte unvollständige Blockanlage .....	435

17.2	Lateinische Quadrate .....	439
17.2.1	Einleitung .....	439
17.2.2	Das lateinische Quadrat mit 1 Beobachtung je Zelle .....	441
17.2.3	Fehlende Angaben .....	444
17.2.4	Die relative Effizienz des lateinischen Quadrates .....	445
17.2.5	Lateinische Quadrate mit mehr als 1 Beobachtung je Zelle .....	446
17.2.6	Die Varianzanalyse einer Gruppe von p verbundenen lateinischen Quadraten ..	450
17.2.7	Der Überkreuzversuch .....	453
17.2.8	Das Griechisch-Lateinische Quadrat .....	456
18.	FAKTORIELLE VERSUCHE	
18.1	Einleitung .....	458
18.2	Die Varianzanalyse eines a x b faktoriellen Versuches .....	462
18.3	Der 3-Faktor Versuch .....	478
18.4	Der 4-Faktor Versuch .....	484
18.5	Das Yates'sche Verfahren zur Berechnung von faktoriellen Wirkungen .....	488
18.6	Erwartungswert der mittlere Quadrate .....	489
18.7	Die teilweise hierarchische Klassifikation .....	493
18.8	Ungleiche Klassenbesetzung im 2-Faktor Versuch .....	497
18.8.1	Proportionale Klassenbesetzung .....	497
18.8.2	Nicht-proportionale Klassenbesetzung .....	499
19.	VERSUCHSANLAGEN ZUR ERFASSUNG VON WIRKUNGSFLÄCHEN	501
20.	DIE SPALTANLAGE	
20.1	Einleitung .....	513
20.2	Ein Versuch mit 2 Faktoren, angeordnet in einer vollständig randomisierten Versuchsanlage .....	515
20.3	Der 2-Faktor Versuch, mit Faktor A in randomisierten Blocks bzw. im lateinischen Quadrat .....	519
20.4	Fehlende Angaben .....	520
20.5	Die Doppeltspaltanlage mit 3 Faktoren .....	521
20.6	Die Doppeltspaltanlage mit mehr als 3 Faktoren .....	528
20.7	Die Spaltblockanlage .....	532
21.	DIE KOVARIANZANALYSE	
21.1	Einleitung .....	536
21.2	Die Homogenität der Regressionskoeffizienten .....	537
21.3	Die Differenzen zwischen den angepassten Mittelwerten .....	540
21.3.1	Versuchsanlage einer völlig zufälligen Anordnung der Behandlungen .....	540
21.3.2	Die Blockanlage .....	543
21.3.3	Die a x b faktorielle Versuch .....	547
21.4	Die mehrfache Kovarianzanalyse .....	553
21.5	Die Kovarianzanalyse in der Spaltanlage .....	554
22.	CONFOUNDING	
22.1	Vollständiges Confounding im 2 <sup>p</sup> faktoriellen Versuch .....	559
22.2	Partielles Confounding .....	565
22.3	Der 2 <sup>4</sup> Versuch mit 4 Einheiten je Block .....	567
22.4	Vollständiges Confounding im 3 <sup>2</sup> faktoriellen Versuch .....	569
22.5	Confounding im 3 <sup>3</sup> faktoriellen Versuch .....	571
22.6	Confounding in Quasi-Lateinischen Quadraten .....	577
22.6.1	Der 2 <sup>3</sup> faktorielle Versuch .....	577
22.6.2	Der 3 <sup>3</sup> faktorielle Versuch in Quasi-Lateinischen Quadraten .....	581
22.7	Die teilweise Wiederholung .....	584

23. DIE PROBITANALYSE	588
23.1 Einleitung .....	588
23.2 Die Probittransformation .....	590
23.3 Die Regressionsanalyse .....	594
23.4 Die Maximum-Likelihoodschätzung .....	
24. DIE DISKRIMINANZANALYSE	
24.1 Problemstellung und Prüfverfahren .....	600
24.2 Die Diskriminanzfunktion als Regressionsproblem .....	606
25. ZEITREIHEN	
25.1 Einleitung .....	609
25.2 Das gleitende Mittel .....	610
25.3 Die Zufälligkeitsprüfung .....	612
25.3.1 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl von Wendepunkten .....	612
25.3.2 Der mittlere Quadrat-Differenztest .....	614
25.3.3 Der Iterationstest .....	616
25.4 Autoregression .....	619
25.5 Die Korrelation innerhalb der Zeitreihe .....	619
25.5.1 Der Reihenkorrelationskoeffizient .....	621
25.5.2 Der partielle Reihenkorrelationskoeffizient .....	623
25.6 Periodizität .....	623
25.6.1 Die harmonische Analyse .....	627
25.6.2 Die Sinuskurve in der Varianzanalyse .....	631
25.7 Das Korrelogramm .....	

ANHANG (Tabellen, Stichwörterverzeichnis)

# ÜBERSICHT DER TABELLEN

A.	Zufallszahlen .....	634
B.	Normalverteilung mit $\mu = 45$ und $\sigma^2 = 190,14$ .....	635
C.	Die kumulative Verteilung der standardisierten Variablen .....	636
D.	Die Ordinaten der Normalkurve .....	639
E.	Die kritischen Schranken der Prüfwahl $t$ .....	640
F.	Die oberen 0,025-Schranken der F-Verteilung .....	641
G.	Die oberen 0,005-Schranken der F-Verteilung .....	642
H.	Die oberen 0,05-Schranken der F-Verteilung .....	643
I.	Die oberen 0,01-Schranken der F-Verteilung .....	644
J.	Die kumulative Chi-Quadratverteilung .....	645
K.	Die Signifikanzgrenzen der Dixon'schen Prüfwahl $R$ .....	646
L.	Die Vertrauensgrenzen des Quotienten $\frac{\text{Spannweite}}{\text{Standardabweichung}}$ in normalverteilten Gesamtheiten .....	647
M.	Die Vertrauensgrenzen des Mittelwertes einer Poisson-Verteilung .....	648
N.	Die Koeffizienten und Multiplikatoren zur Berechnung orthogonaler Polynome .....	650
O.	Die kritischen Grenzen der Lord'schen Prüfwahl $t^0$ .....	654
P.	Die signifikante studentisierte Spannweite nach Duncan .....	655
Q.	Die signifikante studentisierte Spannweite nach Newman-Keuls und Tukey .....	656
R.	Die Signifikanzgrenzen der Durbin-Watson-Prüfwahl $d$ .....	657
S.	Die kritischen Grenzen der Prüfwahl $t_{\text{Dunnnett}}$ .....	658
T.	Die kritischen Schranken der Prüfwahl $K$ beim Link- und Wallace-Test .....	659
U.	Die kritischen Grenzen des Quotienten $\frac{\text{grösste Varianz}}{\text{kleinste Varianz}}$ beim Prüfverfahren nach Hartley .....	660
V.	Die Signifikanzgrenzen der Prüfwahl $\hat{G}_{\text{max}}$ beim Cochran-Test .....	661
W.	Winkeltransformation .....	662
X.	Grundgesamtheit von Wertepaaren $X_1, Y_1$ .....	665
Y.	Die Signifikanzgrenzen des Korrelationskoeffizienten .....	666
Z.	Die Fisher'sche Transformation des Korrelationskoeffizienten .....	667
AA.	Der erforderliche Stichprobenumfang, im Falle einer Binomialverteilung, wenn $\alpha$ und $(1 - \beta)$ vorgegeben sind .....	668
BB.	Die Vertrauensgrenzen des Mittelwertes einer Binomialverteilung ( $1 - \alpha = 0,95$ ) .....	670
DD.	Die kritischen Grenzen der Anzahl von Iterationen beim Iterationstest .....	672
EE.	Die kritischen Grenzen der Prüfwahl $D_{\text{max}}$ beim Kolmogorov-Smirnov-Einstichprobentest .....	673
FF.	Die Wahrscheinlichkeit, dass $\chi^2_r$ , im Falle eines Zutreffens der Nullhypothese, beim Friedman-Test überschritten wird .....	674
GG.	Die Wahrscheinlichkeit, dass die Prüfwahl $H$ beim Kruskal-Wallis-Test, im Falle eines Zutreffens der Nullhypothese, überschritten wird .....	676
HH.	Signifikanzschranken der Prüfwahl $K_d$ beim Kolmogorov-Smirnov Zwei-Stichprobentest .....	678
II.	Ablehnungsschwelle für die Grösse $(n_{\text{pos.}} - n_{\text{neg.}})$ , beim Kendallschen Rangkorrelationskoeffizienten .....	679
JJ.	Die Signifikanzschranken des Spearman'schen Rangkorrelationskoeffizienten .....	680
KK.	Die Wahrscheinlichkeit, dass $U > U_1$ , beim Mann-Whitney-Test, für $n = 3$ bis $n = 8$ .....	681
LL.	Die kritischen Grenzen der Prüfwahl $U$ beim Mann-Whitney-Test ( $n_1$ oder $n_2 > 8$ ) .....	683
MM.	Probit-Transformation .....	684
NN.	Die Gewichtskoeffizienten bei der Probitanalyse .....	686
OO.	Rankits für unterschiedliche Werte von $n$ (negative Werte, für $n > 10$ sind nicht in der Tabelle wiedergegeben worden) .....	687
PP.	Gewichtskoeffizient $a$ für unterschiedliche Werte von $n$ ( $a_1 = -a_{n-1+1}$ ), beim Shapiro-Wilk-Test .....	688
QQ.	Ablenkungsschwellen der Prüfwahl $W$ beim Shapiro-Wilk-Test (einseitige Prüfung) .....	689
RR.	Hilfsfunktion $\theta$ für gestutzte Stichproben .....	690
SS.	Hilfsfunktion $\lambda$ für zensierte Stichproben .....	691
TT.	Varianzmultiplikatoren für gestutzte und zensierte Stichproben .....	692