

## Zur Durchmesser-Struktur bei *Pinus radiata*\*)

Von K. von GADOW

Forstwissenschaftliche Fakultät, Universität Stellenbosch, Südafrika

Die Durchmesser-Struktur gleichaltriger Kiefernbestände wird durch die Stammzahl, den Mitteldurchmesser, den unteren Grenzdurchmesser und den Standardfehler festgelegt. Diese vier Bestandesmerkmale bestimmen die Parameter der stetigen WEIBULL-Verteilungsfunktion. Bei der Analyse der Struktur von Waldbeständen ist es daher erforderlich, die Entwicklung eines jeden Merkmals, das die Struktur beeinflusst, einzeln zu untersuchen.

Das Datenmaterial, auf das sich die gegenwärtige Untersuchung stützt, entstammt der ertragskundlichen Beobachtungsfläche Tokai im westlichen Kapgebiet Südafrikas. Fläche B32 ist aus 8 Unterflächen zusammengesetzt. Die Entwicklung der Stammzahlen über dem Alter ist aus Tabelle 1 ersichtlich.

Tabelle 1: Alter und Stammzahlen der Tokai-Flächen.

Table 1: Ages and stem numbers in the 8 plots of the Tokai trial.

Alter	Fläche							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Stammzahl pro Hektar							
0	2965	1483	976	1483	741	741	741	741
2,7	2954	1483	976	1483	741	741	741	741
3,0	2954	1483	976	1483	741	741	741	741
3,7	2954	1483	976	989	741	741	741	741
4,0	2954	1483	976	989	741	741	741	741
5,9	2954	1483	976	729	741	741	741	741
6,0	2954	1483	976	729	494	494	494	482
7,0	2954	1483	976	729	494	494	494	482
8,0	2954	1483	976	729	494	371	371	371
9,0	2954	1483	976	729	494	371	247	247
10,0	2954	1483	976	729	494	371	247	123
12,0	2954	1483	976	729	494	371	247	123
14,0	2917	1483	976	717	494	371	247	123
16,0	2867	1483	976	717	494	371	247	123
20,0	2793	1483	976	704	494	371	247	123
22,0	2719	1458	976	704	494	371	247	123
24,0	2558	1421	976	692	494	371	247	
26,0	2385	1347	976	692	494	371	247	
28,0	2348	1322	976	692	494	371	247	
30,0	2298	1310	976	692		371	247	
32,0	2199	1273	976	692		371	247	
34,0	2064	1273	952	680		371	247	
36,0	1829	1273	939	680		371	247	
39,0	1817	1260	927	667				
44,0		1149	927	667				

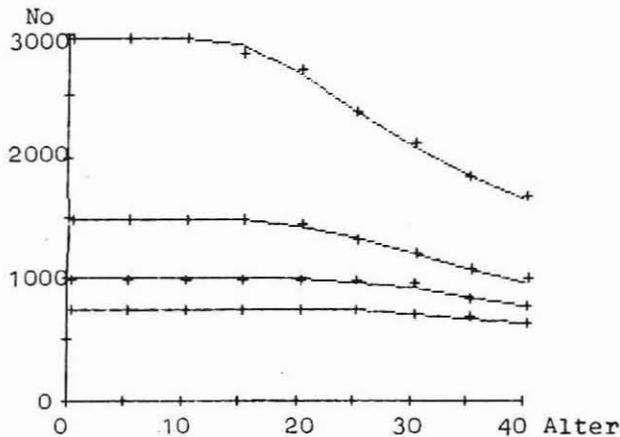


Abb. 1: Anpassung der beobachteten Stammzahlen über dem Alter.  
 Fig. 1: First level fitting observed stem numbers over age for different initial densities.

Die Krümmung des stärker abfallenden Teils der Funktion wird vor allem durch den Parameter  $c$  beeinflusst: mit abnehmendem Wert von  $c$  nimmt die Krümmung zu. Es war beim vorliegenden Datenmaterial allerdings nicht nötig,  $c$  zu verändern. Für alle Ausgangsstammzahlen erwies sich  $c = 2$  als befriedigend.

Der Zeitpunkt des Beginns der Stammzahlabnahme wird durch  $b$  gesteuert: je größer der Wert von  $b$ , desto später beginnt der Abfall der Stammzahlkurve. Es ist daher einleuchtend, daß  $b$  mit abnehmender Ausgangsstammzahl zunimmt. Der Grad dieser Zunahme ist in Tokai nur mäßig. Der Ausgleich über  $No$  erfolgte mit Hilfe der Parabel:

$$b = 28.32 + 1/365000 * (No - 3200)^2$$

Das „Gefälle“ der Stammzahlabnahme wird durch den Parameter  $f$  bestimmt: je größer der Wert von  $f$  (bei gleichem Wert von  $b$ ), desto stärker ist das Gefälle. In Tokai konnte  $f$  bei einem Wert von 0.75 für alle  $No$  konstant gehalten werden.

Aus dem beschriebenen Ausgleich ergibt sich das System der Stammzahlabnahme in Abhängigkeit vom Alter und der Ausgangsstammzahl. Abb. 2 zeigt die ausgeglichenen Stammzahlabnahmekurven.

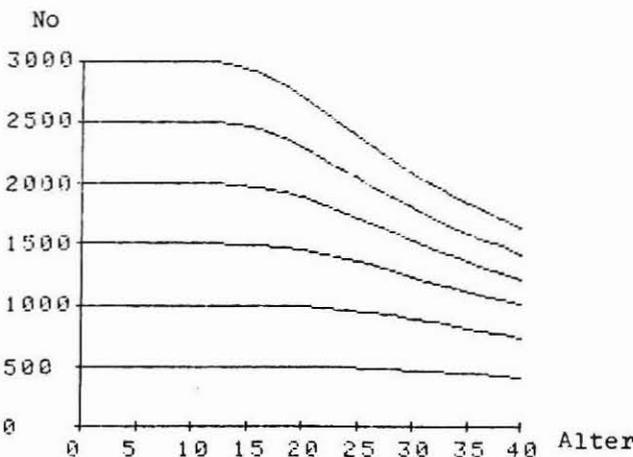


Abb. 2: Ausgeglichenes System der Stammzahlabnahme über dem Alter.  
 Fig. 2: Harmonized system of stem number decline over age.

### Die Stammzahl

Für die Beschreibung der Stammzahlabnahme wurde, nach Prüfung einer Reihe verschiedener Modelle, die folgende Funktion verwendet:

$$Nr = No - No * \exp(-(b/A)^c) * f$$

wobei

$Nr$  = wirkliche Stammzahl/ha

$No$  = Ausgangsstammzahl/ha

$A$  = Alter

$c = 2$ ;  $b, f > 0$

(\* = Multiplikationszeichen)

Die Güte der Anpassung für die beobachteten Ausgangsstammzahlen ist aus Abb. 1 ersichtlich. Die Stammzahlabnahmefunktion erwies sich als sehr brauchbar, nicht nur wegen ihrer Flexibilität, sondern auch wegen der Aussagekraft der einzelnen Parameter.

\*) Diese Arbeit entstand während eines Forschungsaufenthaltes des Autors am Lehrstuhl für Waldwachstumskunde der Universität München vom Juli bis Dezember 1982. Eine zweite Arbeit zum gleichen Themenkreis erscheint demnächst im forstwissenschaftlichen Centralblatt.

Die Kategorie „lebende Bäume“ schließt eine erhebliche Zahl „gerade noch lebender“ Individuen ein, besonders im höheren Alter und bei größeren No. Es handelt sich dabei um unterständige Bäume, deren Durchmesser über mehrere Jahre stagniert oder sogar abnimmt. Der genaue Zeitpunkt des Absterbens ist bei solchen Bäumen gewöhnlich okular nicht zu bestimmen. Dieser Zeitpunkt ist aber entscheidend für die Ermittlung der lebenden Grundfläche. Hohe Grundflächen enthalten häufig einen starken Anteil absterbender, wertloser Individuen. Dadurch ergibt sich eine scheinbar hohe Grundflächenleistung, die in der Praxis allerdings oft nicht verwertbar ist.

Das Absterben im Bestand erfolgt nicht regelmäßig, sondern schubweise. Diese Tatsache ist aus Abb. 1 nicht ersichtlich, weil die Werte für 5-Jahresperioden aufgetragen wurden. Aus den ursprünglichen Daten ergibt sich der Eindruck, daß einer Anhäufung wuchsschwacher Bäume irgendwann ein gemeinsames Absterben folgt: erst der Aufstau morbider Bäume, dann der Zusammenbruch des gesamten geschwächten Teils der Population. Die natürliche Stammzahlabnahme ist also in Wirklichkeit nicht ein stetiger, sondern ein pulsierender Vorgang.

### Der Mitteldurchmesser

Für die Beschreibung der Zunahme des mittleren Durchmessers erwies sich das folgende Modell als brauchbar:

$$D = a + b \cdot c^A$$

wobei

- D = Mittlerer Durchmesser
- A = Alter
- a, b, c = Parameter der Funktion

Abb. 3 gibt einen Eindruck von der ersten Stufe der Anpassung für verschiedene No. Die mittlere und die maximale Residualabweichung der beobachteten von den erwarteten Durchmessern beträgt 0,93 cm bzw. 2,87 cm.

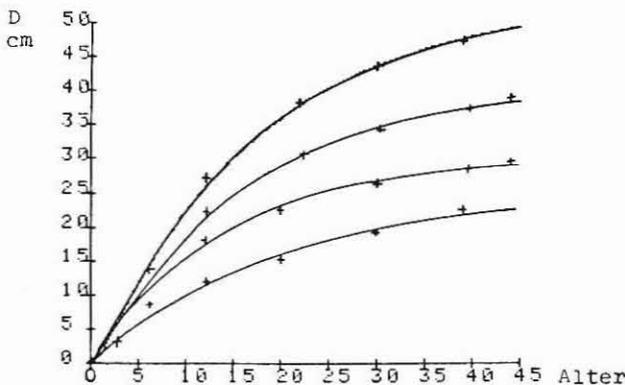


Abb. 3: Erste Ausgleichstufe der beobachteten Mitteldurchmesser bei unterschiedlichem Alter und unterschiedlicher Ausgangsstammzahl (No).  
Fig. 3: First level fitting of mean diameter over age for different initial densities.

Die Parameter a und b der Gleichung (2) verhielten sich umgekehrt proportional zueinander, und zwar so, daß  $b = -1 \cdot a$ . – Die Werte für a und c mußten getrennt über No ausgeglichen werden. Beim Ausgleich von a wurde die Beziehung

$$a = 110,9 \cdot \exp(-0,0819205 \cdot \text{No}^{0,36017})$$

verwendet.

Eine vom Ursprung etwas verschobene und durch einen Multiplikator gedehnte Parabel erwies sich als nützlich beim Ausgleich von c, nämlich

$$c = b1 + 1/b2 \cdot (\text{No} - b3)^2$$

wobei

- b1 = Wert der Verschiebung auf der Ordinate (= 0,9352)
- b3 = Wert der Verschiebung auf der Abszisse (= 1600)
- b2 =  $1,2 \cdot 10^8$

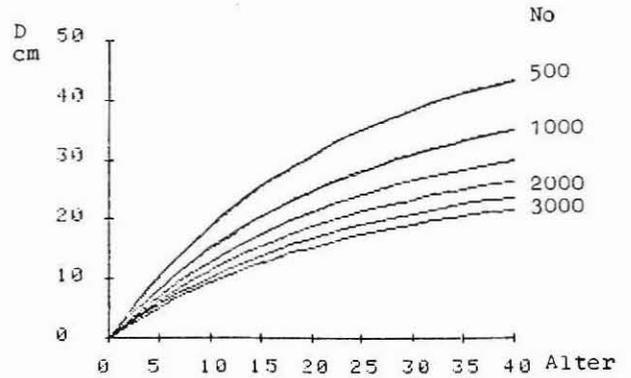


Abb. 4: Ausgeglichenes System des Mitteldurchmessers über Alter und Ausgangsstammzahl.  
Fig. 4: Harmonized system of mean diameter over age for different densities.

Die ausgeglichenen Durchmessercurven sind in Abb. 4 aufgeführt. Der nicht-lineare Effekt der Ausgleichsfunktionen ist deutlich erkennbar. Dieser Effekt wird durch die beobachteten Werte bestätigt.

### Die Standardabweichung

Bei der Beschreibung der Standardabweichung (SD) bis zum Alter 40 erwies sich, nach Prüfung einiger anderer Modelle, die lineare als die sinnvollste Beziehung (obwohl wahrscheinlich angenommen werden darf, daß die lineare Entwicklung von SD irgendwann einmal endet). Daß der Einfluß der Ausgangsstammzahl auf die Standardabweichung bei Pinus radiata signifikant ist, hat van Laar (1982) schon festgestellt.

Der Koeffizient a der Gleichung  $SD = a + b \cdot A$  wurde linear über No ausgeglichen. Ebenso der Koeffizient b derselben Gleichung über a, und zwar

$$a = 0,55106 + 0,000261238 \cdot \text{No}$$

$$b = 0,20138 + 0,011083 \cdot a$$

Die ausgeglichenen Geraden sind in Abb. 5 dargestellt.

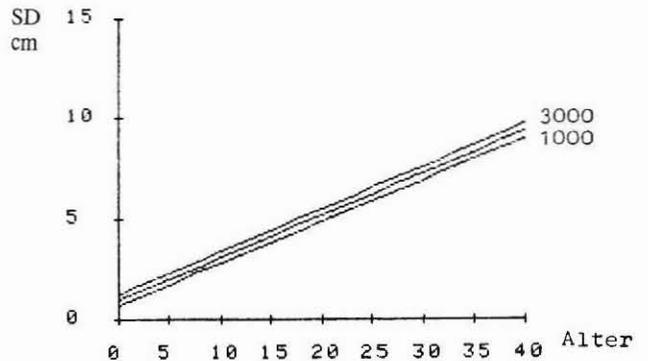


Abb. 5: Ausgeglichenes System der Standardabweichung (SD) über Alter und Ausgangsstammzahl.  
Fig. 5: Harmonized system of the standard error (SD) over age and initial density.

### Der untere Grenzdurchmesser

Der untere Grenzdurchmesser einer Durchmesserverteilung entspricht dem Parameter a der Weibull-Funktion. Für die Beschreibung der altersbezogenen Entwicklung des unteren Grenzdurchmessers wurde das Gompertz-Modell verwendet

$$W_a = a \cdot \exp(-b \cdot \exp(k \cdot A))$$

wobei

Wa = Weibull-Parameter a

Der Zeitpunkt des Anstiegs von Wa wird durch a gesteuert: je größer a, desto später erfolgt der Anstieg des unteren Grenzdurch-

messers. – Die Steilheit des Anstiegs wird durch  $k$  bestimmt: je größer der Wert von  $k$ , desto steiler ist die Zunahme von  $W_a$  über dem Alter. – Der Parameter  $a$  schließlich verkörpert den asymptotischen Wert, den der untere Grenzdurchmesser im späteren Alter annimmt.

Die Ausgleichsfunktionen lauten:

$$a = 95.09 \cdot \exp(-0.125813 \cdot N_o^{0.3801})$$

$$b = 11.29 + 1/226890 \cdot N_o^2$$

$$k = -0.1446 - 0.0627824 \cdot (a/b)$$

Der Steigungsparameter steht also, wie zu erwarten ist, in linearer Beziehung zum Verhältnis asymptotischer Wert/Beginn des Anstiegs.

Die endgültigen Funktionen sind in Abb. 6 dargestellt.

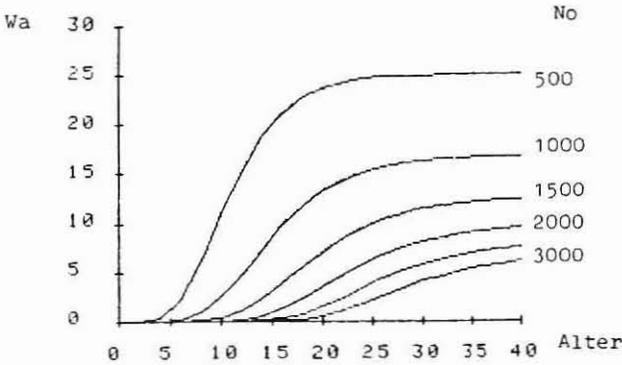


Abb. 6: Ausgeglichenes System des unteren Grenzdurchmessers über Alter und Ausgangsstammzahl.

Fig. 6: Harmonized system of the lower bound diameter over age and initial density.

#### Der Maßstabsparameter der Weibull-Funktion

Der „Maßstabsparameter“  $W_b$  der Weibull-Funktion wurde nicht direkt über dem Alter abgeleitet.  $W_b$  ist proportional zur Differenz  $D - W_a$ , und zwar unabhängig von der Ausgangsstammzahl:

$$W_b = 1.15805 \cdot (D - W_a)$$

Die aus der Differenz von Mitteldurchmesser und unterem Grenzdurchmesser resultierende Entwicklung von  $W_b$  über dem Alter bei unterschiedlichen Ausgangsstammzahlen ist in Abb. 7 dargestellt.

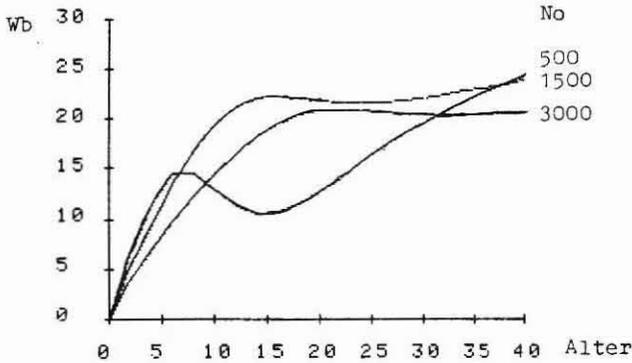


Abb. 7: Der Weibull-Parameter  $b$  ( $W_b$ ) über Alter und Ausgangsstammzahl.

Fig. 7: The Weibull parameter  $b$  ( $W_b$ ) over age and initial density.

Bis zum Alter 7 etwa nimmt  $W_b$  relativ schnell zu als Folge der rapiden Zunahme von  $D - W_a$ . Nach dem Alter 10 etwa ist ein Abflachen, sogar ein Abfall bei geringen  $N_o$ , zu bemerken, weil die Differenz  $D - W_a$  kleiner wird, und zwar weil der Zuwachs des unteren Grenzdurchmessers ab Alter 5 stark zunimmt (vgl. Abb. 6).

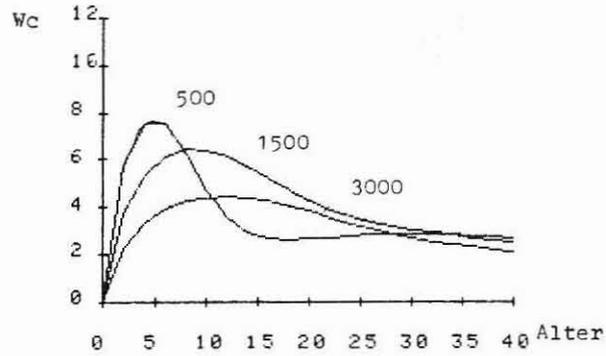


Abb. 8: Der Weibull-Parameter  $c$  ( $W_c$ ) über Alter und Ausgangsstammzahl.

Fig. 8: The Weibull parameter  $c$  ( $W_c$ ) over age and initial density.

#### Der Formparameter

Der Formparameter der Weibull-Funktion  $W_c$  ergibt sich aus dem Verhältnis von Weibull Parameter  $b$  und Standardabweichung:

$$W_c = W_b / SD$$

Die Entwicklung von  $W_c$  über dem Alter ist abgeleitet von  $W_b$  und  $SD$  und in Abb. 8 dargestellt.

Je größer  $SD$  bei gegebenem  $W_b$ , desto kleiner ist  $W_c$ . Der steile Anstieg von  $W_c$  im jungen Alter ergibt sich direkt aus der starken Steigung von  $W_b$  und indirekt aus der schnellen Zunahme der Differenz  $D - W_a$ , besonders bei niedrigen Ausgangsstammzahlen. Ein Vergleich der beobachteten mit den berechneten  $W_b$ - und  $W_c$ -Werten über dem Alter ergab eine relativ gute Übereinstimmung (s. Abb. 9).

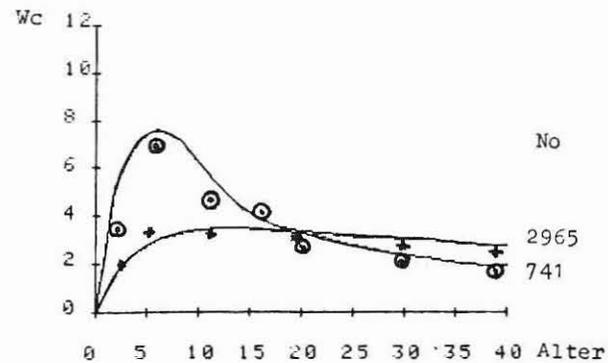
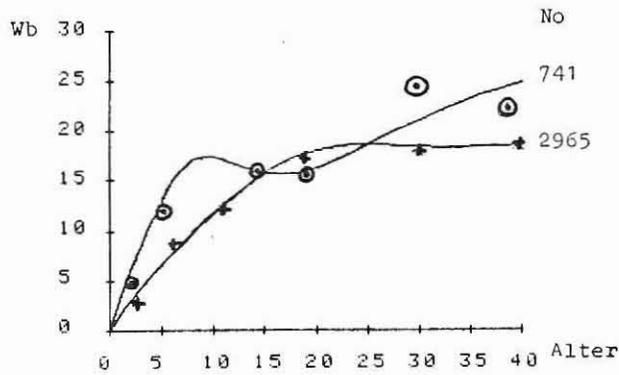


Abb. 9: Beobachtete und erwartete Entwicklung von  $W_b$  und  $W_c$  über Alter und Ausgangsstammzahl.

Fig. 9: Observed and expected development of  $W_b$  and  $W_c$  over age and initial density.

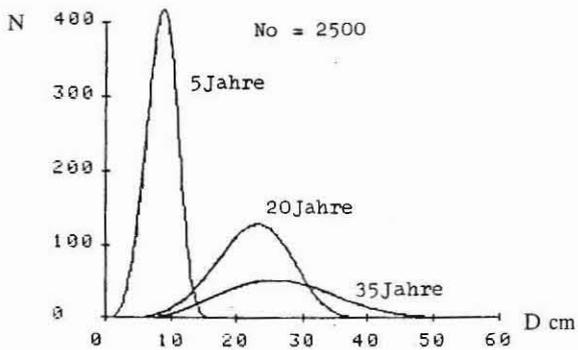
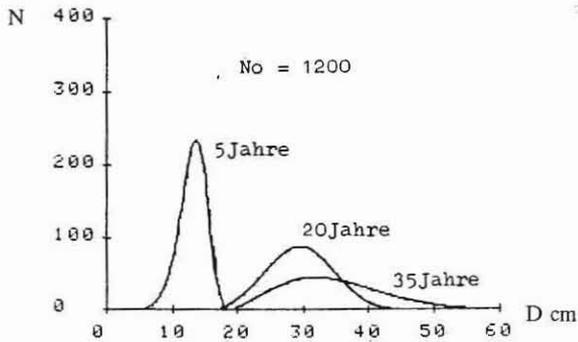
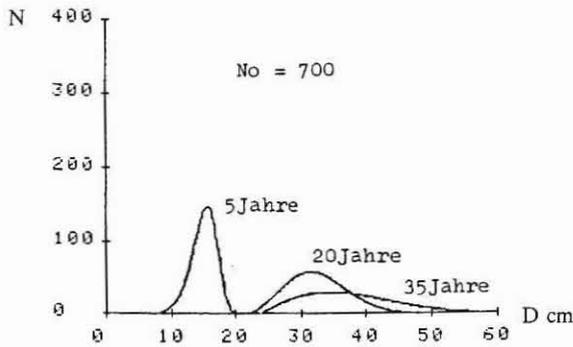


Abb. 10: Durchmesservertellungen über Alter und Ausgangsstammzahl.  
Fig. 10: Diameter distributions over age and initial density.

#### Die Entwicklung der Durchmesservertellung

Aus den vorangegangenen Erfahrungen läßt sich die Entwicklung der Durchmesservertellung über dem Alter und der Ausgangsstammzahl nachvollziehen. Abb. 10 zeigt jeweils drei Verteilungen, in den Altern 5, 20 und 35, bei unterschiedlicher Ausgangsstammzahl.

Bei niedriger Ausgangsstammzahl verschiebt sich der untere Grenzdurchmesser bis zum Alter 20 relativ schnell. Dadurch ergibt sich eine Neigung zur Rechtsschiefe. – Bei hoher Ausgangsstammzahl tritt im unteren Grenzbereich eine frühe, anhaltende Stagnation des Wachstums ein. Der Durchmesser der wuchskräftigen Individuen vergrößert sich, zwar nicht so rapide wie bei den niedrigen Stammzahlen, jedoch stetig weiter. Das Resultat ist ein leichter Hang zur Linksschiefe.

#### Mitteldurchmesser und Grundflächendurchmesser

Für unterschiedliche Alter und Ausgangsstammzahlen wurden drei verschiedene Durchmesser berechnet:

$$d_m = (\sum n_j d_j) / N; \text{ der arithmetische Mitteldurchmesser,}$$

$dg_1 = \sqrt{d_m^2 + s^2}$ ; der Kreisflächendurchmesser nach Prodan (1961, S. 69),

$gg_2 = \sqrt{\sum G_j / n_j * 12732}$ ; der Kreisflächendurchmesser mit Hilfe der Verteilungen berechnet.

Tabelle 2: Verschiedene Durchmesser und dazugehörige Kreisflächen in Abhängigkeit von Alter und Stammzahl.

Table 2: Different diameters and corresponding basal areas over age and stem number.

N	Alter	$d_m$ cm	$G_m$ m <sup>2</sup>	$dg_1$ cm	$G_1$ m <sup>2</sup>	$dg_2$ cm	$G_2$ m <sup>2</sup>
600	5	12,3	7,1	12,4	7,3	13,4	8,4
598	20	33,6	52,9	33,9	54,0	34,1	54,4
525	35	42,4	74,2	43,2	76,8	43,5	77,8
1200	5	10,8	11,0	11,0	11,4	11,8	13,1
1180	20	28,3	74,1	28,7	76,4	29,0	78,0
944	35	34,8	89,7	35,7	94,7	35,9	95,5
1800	5	9,3	12,2	9,5	12,8	10,1	14,4
1719	20	24,1	78,7	24,7	82,4	25,4	86,8
1265	35	29,6	87,1	30,8	94,1	30,9	94,9
2400	5	7,6	10,8	7,9	11,8	8,2	12,8
2209	20	20,3	71,4	21,0	76,5	21,8	82,5
1540	35	23,5	77,7	26,8	86,6	27,0	87,8
3000	5	5,6	7,5	6,1	8,8	6,3	9,2
2697	20	16,1	55,2	17,1	61,8	17,6	65,3
1838	35	21,1	64,4	22,9	75,6	23,1	77,2

Tabelle 2 enthält die Werte der verschiedenen Durchmesser für unterschiedliche Alter und Stammzahlen. Die Werte des  $dg_1$  liegen bekanntlich immer über den Werten des  $d_m$ . In Tabelle 1 reicht die Differenz von 0,1 bis 1,8 cm. Die Differenz vergrößert sich mit höherer Ausgangsstammzahl und höherem Alter, wegen der Zunahme des Standardfehlers. Aus dem Unterschied der Durchmesser ergeben sich Kreisflächenunterschiede, im Beispiel bis zu 11 m<sup>2</sup> pro ha.

Der Durchmesser des Kreisflächenmittelstammes ( $dg_2$ ) wurde über die Summe der Kreisflächen der einzelnen Durchmesserstufen berechnet. Die Werte dieses Durchmessers lagen im Vergleich durchweg am höchsten. Die Differenz zu den Werten des  $d_m$  und des  $dg_1$  nahm mit zunehmender Stammzahl und mit zunehmendem Alter ab. Im Alter 35 beträgt die Differenz  $dg_2 - dg_1$  zum Beispiel im Höchstfall 0,3 cm, im Alter 5 dagegen 10 cm. Die Kreisflächenunterschiede zwischen  $dg_1$  und  $dg_2$  sind deshalb auch nicht erheblich.

Die höchste beobachtete  $d_m$ -Kreisfläche in Tokai beträgt 87,2 m<sup>2</sup> pro ha. Die Kreisflächenwerte in Tabelle 2 sind Erwartungswerte, deren Maxima bei Ausgangsstammzahlen liegen, die in Tokai nicht verwendet wurden. Die  $N_0$ , die theoretisch die höchsten Kreisflächen erzielen, sind also nicht beobachtet, sondern abgeleitet.

#### Literatur

PRODAN, M. 1961: Forstliche Biometrie. BLV München. – VAN LAAR, A. 1982: The response of *Pinus radiata* to initial spacing (im Druck).

#### Summary

#### THE DEVELOPMENT OF DIAMETER DISTRIBUTIONS IN PINUS RADIATA

The article demonstrates the development of a Weibull diameter structure model in *Pinus radiata*. Stem number, mean diameter, standard error and lower bound diameter are described. Several different models are used of which the stem number function is likely to represent a new approach. Finally, the dynamics of the Weibull parameters are evaluated.